Esercizio 10.9

Proviamo anzitutto che, per ogni $a \in A$, ed ogni $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A[X]$, il prodotto del polinomio costante di termine noto a (da noi precedemente indicato con $\widehat{a}$) e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è il polinomio $(ab_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Osserviamo che $\widehat{a} = (a\delta_{0n})_{n\in\mathbb{N}}$, essendo δ_{0n} il simbolo di Kronecker (pari a 1 se $n = 0$, pari a 0 altrimenti). Quindi, detto c_n il termine n-esimo del prodotto considerato, si avrà, per definizione,

$$c_n = \sum_{i+j=n} a\delta_{0i}b_j = a\delta_{00}b_n = ab_n.$$

Segue quanto sopra affermato.

Quindi, posto, per ogni $i \in \mathbb{N}$, $u_i = (\delta_{in})_{n\in\mathbb{N}}$, proviamo che $u_i = u^i$. La tesi è vera per $i = 0$, in base ad una convenzione valida in ogni struttura moltiplicativa dotata di elemento neutro (la potenza di esponente zero si pone pari all'elemento neutro: nel nostro caso, si tratta del polinomio $1 = (\delta_{0n})_{n\in\mathbb{N}} = u_0$). Supponiamo ora sia $i > 0$ e la tesi vera per $i-1$. Si ha, per l'ipotesi induttiva,

$$u^i = u \cdot u^{i-1} = (\delta_{1n})_{n\in\mathbb{N}}(\delta_{i-1n})_{n\in\mathbb{N}}.$$

Indicato con d_n il termine n-esimo del prodotto, si avrà, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$d_n = \sum_{h+k=n} \delta_{1h}\delta_{i-1k} = \begin{cases} \delta_{11}\delta_{i-1i-1} = 1 & \text{se } n = i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Ciò prova che il prodotto è $(\delta_{in})_{n\in\mathbb{N}} = u_i$, come volevasi. Ne consegue che, per ogni $i \in \mathbb{N}$,

$$a_i u^i = (a_i\delta_{in})_{n\in\mathbb{N}},$$

e questo è il polinomio il cui termine i-esimo è a_i, mentre i restanti termini sono nulli. Ma allora, chiaramente, si ha che la somma di questi polinomi è il polinomio $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ossia

$$\sum_{i=0}^{N} a_i u^i = f.$$